International Journal of Advanced Engineering Research and Science (IJAERS)
Peer-Reviewed Journal
ISSN: 2349-6495(P) | 2456-1908(O)
Vol-9, Issue-10; Oct, 2022
Journal Home Page Available: https://ijaers.com/
Article DOI: https://dx.doi.org/10.22161/ijaers.910.32

Alternative Methodologies for Building the Concept of Fractals

Metodologias Alternativas para a Construção do Conceito de Fractais

Daiane Rudniak, Izabel Passos Bonete, Leoni Malinoski Fillos, Joyce Jaquelinne Caetano

Departmento de Matemática, UNICENTRO, Brasil

Received: 13 Sep 2022,
Received in revised form: 03 Oct 2022,
Accepted: 09 Oct 2022,
Available online: 25 Oct 2022

***Keywords*— Mathematics Licentiate Course. Geometry. Fractal Geometry. Teaching proposal.**

***Palavras-chaves*— Curso de Licenciatura em Matemática. Geometria. Geometria Fractal. Proposta de ensino.**

***Abstract*— This work seeks to discuss fractal geometry concepts, as well as perspectives for its teaching and learning, through the application of a proposal to approach the theme, together with academics from a Mathematics Degree course. Such knowledge is essential so that future mathematics teachers can expand their knowledge and, consequently, develop the geometric thinking necessary to work in high school and safely approach this topic. A bibliographic study was carried out on the subject in the area of education, as well as an attempt to deepen concepts of fractal geometry and to know different methodological possibilities that provide meaning to the teaching and learning process of this content. A work proposal on this theme was also built, which was applied in a workshop in the Mathematics Degree course. The results indicate that the workshop was productive, as it provoked reflections and conceptual changes from the participants on fractal geometry.*

***Resumo*— Este trabalho busca discutir conceitos de geometria fractal, bem como perspectivas para o seu ensino e aprendizagem, por meio da aplicação de uma proposta para à abordagem do tema, junto à acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática. Tal conhecimento é fundamental para que futuros docentes de Matemática possam ampliar seus conhecimentos e, consequentemente, desenvolver o pensamento geométrico necessário para atuarem no Ensino Médio e abordarem esse tema com segurança. Realizou-se um estudo bibliográfico sobre o tema na área da educação, bem como buscou-se aprofundar conceitos de geometria fractal e conhecer diferentes possibilidades metodológicas que propiciem significado ao processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo. Construiu-se, ainda, uma proposta de trabalho desta temática que foi aplicada em uma oficina no curso de Licenciatura em Matemática. Os resultados indicam que a oficina foi produtiva, pois provocou reflexões e mudanças conceituais dos participantes sobre a geometria fractal.*

I. INTRODUÇÃO

A geometria fractal é uma área da Matemática que surgiu no século XX, na década de 70. Teve como precursor o francês Benoit Mandelbrot, quando este buscou responder comportamentos e propriedades de figuras mais complexas, as quais a geometria euclidiana

não era capaz de representar. Dentre as características principais de um fractal, estão as propriedades de autossimilaridade, de dimensão fracionária e complexidade infinita (PEREIRA; BORGES, 2017).

Segundo Camilo et al. (2019), a propriedade de autossimilaridade é observada quando ao delimitar um fragmento do fractal, percebe-se que tal fragmento é semelhante ao fractal, apenas com uma redução do tamanho original, em escala. Já a dimensão espacial fracionária e complexidade infinita, podem ser caracterizadas devido às formas geométricas complexas e irregulares dos fractais.

Nessa perspectiva, fractais são definidos como formas geométricas em que uma parte se assemelha ao todo, ou seja, ela é obtida por meio de um processo de iteração, em que estes processos não alteram o formato original, sendo representado em escalas distintas. Os fractais podem ser encontrados em todo o universo natural e em quase toda ciência, notáveis nos aspectos das nuvens, montanhas, árvores, brócolis, couve-flor, relâmpagos, na arte e na matemática (SILVA; SIMADA; LUCCAS, 2017).

Considerando a presença abundante na natureza, entende-se que o ensino dos fractais para alunos da educação básica torna-se algo natural, prazeroso, interessante e interativo. Por meio da realidade vivenciada pelos alunos e tendo o conhecimento que alguns fractais presentes na natureza - nos brócolis, nas folhas de samambaia, nos flocos de neve -, constituem representações de formas geométricas do nosso entorno, o estudo destas formas, podem despertar a curiosidade por sua autossimilaridade.

Camilo et al. (2019) afirma que a inserção da geometria fractal na sala de aula se justifica por possibilitar conexões com várias ciências e responder à limitação da geometria euclidiana para os estudos de formas mais complexas da natureza. Além disso, a construção de fractais é instigante e tende a despertar a curiosidade dos alunos nos processos iterativos, tornando possível a apropriação dos conceitos matemáticos envolvidos.

Nessa perspectiva, o presente estudo tem por objetivo discutir sobre uma proposta de ensino e aprendizagem da geometria fractal, por meio de uma abordagem que propicie significado e compreensão a essa temática, possibilitando ao aluno ampliar os conhecimentos matemáticos e desenvolver o raciocínio geométrico e, ao professor, um material de apoio para suas aulas. Além disso, para o professor é um momento de refletir sua prática pedagógica, haja vista a possibilidade de abordar um conteúdo relativamente novo e que necessita do uso de uma metodologia diferenciada da tradicional.

II. GEOMETRIA FRACTAL, SUA ORIGEM E CONSEQUÊNCIAS DE SEU SURGIMENTO

Benoit Mandelbrot nasceu em Varsóvia (1924), de família judia, natural da Lituânia. Em 1948 foi para os Estados Unidos estudar Ciência Aeroespacial, conseguindo, posteriormente, um cargo na IBM – Centro de Pesquisas Thomas Watson, onde trabalhou com problemas de economia. Também resolveu problemas com ruídos nas linhas telefônicas, utilizadas em redes entre os computadores, a partir de um trabalho de George Cantor, chamado Poeira de Cantor, pensando nos erros de transmissão como um desses conjuntos de Cantor (BARBOSA, 2005).

Mandelbrot estudou situações e modelos durante anos, até mesmo de cientistas de outras áreas, a fim de aplicar suas ideias. Desta forma, objetos ou figuras caracterizadas como fractais em 1975, por Mandelbrot, já preexistiam há muito tempo. Estes objetos e figuras, são denominados como monstros matemáticos, devido as características e resultados inusitados (BARBOSA, 2005).

Dentre os estudos anteriores estão: a publicação de George Cantor, de 1883, conhecida como Conjunto de Cantor; o trabalho de Giusepe Peano, de 1890, denominado Curva de Peano; os estudos de David Hilbert, que veio a público como a Curva de Hilbert; Helge Von Koch, que introduziu, em 1904 e 1906, uma curva que hoje recebe seu nome e, a partir desta, surgiu a ilha de Koch; e os trabalhos de Waclau Sierpinski, de 1916, em que são apresentados a curva, o triângulo e o tapete de Sierpinski. Pierre Fatou (1878-1929) e Gaston Julia (1893-1978) também forneceram as bases matemáticas para Mandelbrot, que aproveitou os estudos e desenvolveu-os com recursos computacionais, criando o Conjunto de Mandelbrot e os Conjuntos de Julia (BARBOSA, 2005).

A geometria dos fractais remete a Teoria do Caos. Na Teoria do Caos os fenômenos, a princípio aleatórios e representados por estruturas complexas e fragmentadas, encontram na geometria fractal certa ordem, através do fornecimento e apresentação de regularidades à esses elementos “caóticos” (SULEIMAN, 2019).

A partir da geometria fractal é possível compreender a complexidade das ocorrências naturais, aparentemente desordenadas, irregulares, imprevisíveis e caóticas. Trata-se de uma geometria da natureza, específica, uma vez que a geometria convencional, como a euclidiana, com suas formas regulares, não é capaz de definir.

Assim, é a partir da geometria fractal que se pode calcular elementos com aparências irregulares presentes na natureza, como montanhas, nuvens, flocos de neve e plantas (SULEIMAN, 2019). Da observação das nuvens, constata-se que não podem ser consideradas como esferas,

as montanhas não se apresentam como cones, as linhas costeiras não representam círculos e as ondulações da casca de uma árvore não são suaves, tampouco os relâmpagos se propagam em linha reta (ABBEG; ABBEG; ABBEG, 2015).

Nessa perspectiva, a geometria euclidiana não responde aos problemas complexos da natureza, o que provoca questionamentos quanto à linearidade do saber, já que a complexidade do ambiente está inserida no cotidiano e resultando em uma dificuldade de interpretar a própria realidade. Desta forma, o conteúdo escolar que define, ampara e subsidia um currículo uniforme, sequenciado, racional e linear, não adota a noção de complexidade, ocasionando o afastamento do pensamento complexo em relação ao conhecimento escolar (ABBEG; ABBEG; ABBEG, 2015).

Camilo et al. (2019) afirma que os fractais são formas geométricas abstratas com padrões complexos que se repetem infinitamente, ou seja, o fractal é um conjunto de formas, que ao aproximá-las é possível visualizar várias repetições. Assim, os fractais têm como característica a autossemelhança e a complexidade infinita. Cada parte sempre possui cópias de si mesmas e são gerados pela iteração de processos simples (ABBEG; ABBEG; ABBEG, 2015).

Nos fractais há a característica estética da “simetria”, que é o conceito da ordem da beleza. Tal propriedade proporciona a emoção do belo no aspecto visual dos fractais. Devido a esta característica, encontram-se fractais na arte, na pintura e na arquitetura, além das estruturas fractais estarem presentes na música também (SULEIMAN, 2019).

Castilho e Daga (2017) destacam que a aplicação do conceito da geometria fractal vem sendo explorada também na economia, no que tange a busca de padrões sobre o comportamento das bolsas de valores. Na tecnologia, os fractais são vistos na construção de antenas capazes de captar várias faixas de frequência.

Já na medicina, a geometria fractal é encontrada na estrutura de alguns órgãos, tais como, na estrutura dos pulmões e nas ramificações dos neurônios. A compreensão da geometria fractal pode auxiliar no diagnóstico de câncer, devido à divergência entre a dimensão fractal encontrada em um órgão cancerígeno e em um órgão sadio. O ramo da biologia é onde mais os fractais são vistos, como nas já comentadas estruturas do couve-flor e do brócolis, também nas ramificações das árvores e na reprodução de coelhos (CASTILHO; DAGA, 2017).

III. O ENSINO DE FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

A geometria fractal constitui-se um dos conteúdos específicos elencados nas Diretrizes

Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (2008) e sua abordagem é recomendada tanto para o Ensino Fundamental, como para o Ensino Médio. Este conteúdo tem gerado insegurança e inquietações em professores destes níveis de ensino, uma vez que tal assunto não foi abordado durante a formação docente da grande maioria desses professores e pelo escasso material didático existente.

Nos últimos anos, diversos estudos sobre a geometria fractal vêm sendo desenvolvidos, que apontam para a validade do ensino dessa temática e que contribuem para aproximar a matemática de outras áreas do conhecimento ou mesmo articular os conteúdos da própria matemática. Dentre estes estudos, destacam-se os trabalhos de Paula e Souza (2017), Rudek, Tartare e Gavanski (2014) e Parizi e Abdelnor Neto (2015).

Paula e Souza (2017) abordaram o estudo da geometria fractal com alunos do 3º ano do ensino médio, no que tange as suas principais características, definição e aplicações. Usaram, para tanto, o algoritmo para determinar a dimensão fractal e projeção geométrica no processo iterativo em exemplos como: o Triângulo de Sierpinski, a Curva de Koch e o Conjunto de Cantor. Para maior visualização do conteúdo, foi construído um cartão fractal tridimensional Triângulo de Sierpinski. Antes e depois da aula foi aplicado um questionário aos alunos, com o objetivo de verificar o quanto eles conheciam sobre o assunto e como avaliaram o trabalho realizado. No primeiro questionário, 93% dos estudantes nunca tinham ouvido falar em fractais e 7% mencionaram já terem conhecimento, porém não souberam explicar. Já no segundo questionário houve uma unanimidade em aprovar o ensino de fractais nas escolas.

Rudek, Tartare e Gavanski (2014), por sua vez, apresentaram uma proposta de atividades para um minicurso, com o objetivo de proporcionar formas diferenciadas de trabalhar com a geometria fractal em sala de aula. Primeiramente, a proposta sugere abordar a história desta geometria, suas características e aplicações. Quanto às atividades propostas, a primeira delas refere-se à construção do cartão fractal Triângulo de Sierpinski e o Floco de Neve de Koch no software Geogebra. Ao final destas atividades, os autores sugerem uma discussão com os participantes sobre a matemática que está envolvida nos fractais, generalizando algumas relações e apontando outros conteúdos que possam ser trabalhados com a geometria fractal. Os resultados indicam que a geometria

fractal é uma potencial ferramenta para o ensino, pois sua utilização permite a abordagem de vários conteúdos em diferentes níveis de ensino.

Parizi e Abdelnor Neto (2015) trabalharam a geometria fractal em anos finais do ensino fundamental, por meio da utilização de três aplicativos de celular: o Fractaline, o Fractal Designer e o Sprout Booth, que proporcionaram aos alunos o conhecimento, a visualização, a criação e a modificação dos fractais. Além dos softwares, foi construído um balão fractal, que permitiu a contemplação do processo de formação de um fractal, com a visualização de suas divisões, mas sempre mantendo as características da forma original. Segundo os autores, as atividades despertaram a curiosidade e o interesse dos alunos e promoveram uma aprendizagem prazerosa do conteúdo.

Suleiman (2019) destaca que a geometria fractal no ensino da matemática deve estar veiculada às outras geometrias e pode ser ensinada para os alunos desde o início da escolarização, partindo de atividades matemáticas como medir extensões, áreas e volumes e na exploração de elementos presentes na natureza ou originários de transformações matemáticas.

De acordo com o autor, o estudo dos fractais avançou com o desenvolvimento dos computadores. As imagens geradas por fractais são atraentes e podem ser fontes de motivação para o ensino e aprendizagem de matemática, fomentando uma educação matemática inserida nos momentos atuais, no reino da informática (SULEIMAN, 2019). Esta ação, além de motivadora para os educandos, proporciona um contato com a tecnologia, oportunizando a visualização da beleza das figuras e a descoberta da matemática escondida por trás de cada imagem.

O ensino dos fractais por meio das tecnologias atuais pode ser realizado no laboratório de informática da instituição de ensino, por meio do aplicativo Geogebra, que facilita a construção dos fractais. Tal experiência é capaz de produzir nos alunos uma perspectiva que ultrapassa a compreensão de linearidade, tornando possível o vislumbre da solução dos problemas de ordem complexa (ABBEG; ABBEG; ABBEG, 2015).

Considerando que o ensino da geometria fractal pode tornar a matemática mais instigante e mais real numa sala de aula, despertando o interesse, a curiosidade e a criatividade dos alunos, é de fundamental importância que este conteúdo seja abordado na formação docente inicial para que os futuros professores estejam mais preparados para o ensino da geometria fractal na Educação Básica..

IV. APLICAÇÃO DE UMA PROPOSTA PARA ABORDAGEM DA GEOMETRIA FRACTAL

A proposta de abordagem da geometria fractal foi desenvolvida por meio de uma oficina para acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná. A oficina foi realizada no período noturno, das 19 às 21 h, e contou com a participação de dezoito pessoas.

No início da oficina e ao término dela os participantes responderam a quatro perguntas, com a finalidade de avaliar o conhecimento do tema proposto, antes e depois da oficina. As perguntas foram:

1 – Em que série você está no curso de Matemática?

2 – Já estudou Geometria Fractal em algum momento?

3 – Você sabe o que são e onde podemos encontrar os fractais?

4 – Você sabe qual a importância do ensino de fractais no ensino básico? Justifique.

Em relação à primeira questão, constatou-se que os participantes da oficina eram alunos do 3º e 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática, sendo oito participantes do 3º ano e nove do 4º ano, mais um participante já formado em Matemática.

Quanto à segunda pergunta, a maioria dos participantes, tanto do 3º ano do curso, como do 4° ano, relataram que já haviam estudado a geometria fractal no 2º ano do curso, porém brevemente. Isso se deve ao fato de que na grade curricular do 2º ano, a disciplina de Geometria Euclidiana e Não-Euclidiana contempla noções de geometrias não euclidianas, sendo os fractais um dos temas abordados na disciplina. Dois participantes declararam que não lembravam ou não estudaram sobre o tema.

Na terceira questão, dois participantes do 3º ano relataram que não sabem o que são e onde os fractais podem ser encontrados. Quatro participantes descreveram fractais como figuras geométricas não classificadas, que se repetem sequencialmente, produzidas através de equações matemáticas, sendo encontradas na natureza e nas artes. Dois participantes não descreveram o que são os fractais, apenas relataram que podem ser encontrados na natureza. Em relação aos alunos do 4º ano, dois participantes não responderam. Três participantes relataram que fractais são sequências de formas que se repetem infinitamente, contendo caraterísticas específicas, sendo encontrados na natureza, nas plantas, como samambaia e aranto. Quatro participantes não souberam descrever exatamente o que são fractais, mas relataram que podem ser encontrados na natureza, em plantas e na espiral de um caracol. Constatou-se entre os participantes, um conhecimento

superficial sobre o tema o que indicou a necessidade de um aprofundamento, considerando o objetivo do curso de Licenciatura em Matemática no que se refere a formação de futuros docentes para a Educação Básica.

Para a quarta e última pergunta, dos oito participantes do 3º ano, seis descreveram não saber a importância do ensino de fractais no ensino básico. Dois deles relataram que seria para apresentar aos alunos a geometria não euclidiana e poder associar diversos conteúdos matemáticos como área e volume. Dos nove acadêmicos do 4º ano, três acadêmicos relataram que não sabem qual a importância do ensino de fractais no ensino básico, enquanto os outros seis, descreveram a importância referente a aplicação de conteúdos geométricos, mostrando as formas e associando diversos conteúdos como cálculo de volume, perímetro e área.

Foi possível constatar, dessa forma, a necessidade de se destacar a importância do ensino de fractais na Educação Básica, bem como esclarecer que as medidas clássicas de comprimento, área ou de volume perdem o sentido intuitivo, uma vez que os fractais exibem, como propriedade, a infinita complexidade (ASSIS et al., 2008).

O participante já formado em Matemática relatou que conhece pouco da geometria fractal, porém descreveu que podem ser encontradas na natureza e em obras de arte, e considera importante a abordagem deste conteúdo na Educação Básica, dado que são formas que estão presentes no cotidiano.

Na sequência foi desenvolvida a oficina por meio da exposição teórica sobre os conceitos. Para tanto, foi utilizado o power point e um vídeo, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Xj2Vnk4wy-w, sobre a construção de um cartão fractal, o cartão tridimensional Triângulo de Sierpinski, que visa a contextualizar o conteúdo visto na teoria, de uma forma descontraída e interessante, contribuindo para que o aluno relacione o conteúdo com outras geometrias e, assim, obtenha uma melhor fixação. Silva (2011) menciona que a utilização de vídeo como material didático-pedagógico favorece a educação, pois este recurso tecnológico conjuga som, imagem e movimento e esses elementos tendem a provocar interesse no aluno, bem como a melhoria na didática do professor, a interação entre professor e o aluno e ainda, serve como instrumento provocador de debates sobre uma temática específica.

O material utilizado para a referida construção foi papel cartão, papel A4, régua, tesoura, lápis e borracha. Cada participante teve a oportunidade de construir o seu cartão, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Cartão Triângulo de Sierpinski

Fonte: As autoras (2022)

Os passos para a construção do cartão foram apresentados por meio de slides no Power point, seguindo a sequência:

1- Dobre o papel A4 ao meio, com as pontas para cima. Considere o retângulo que se forma, com medida de base b e de altura a;

2- Marque o ponto central da base b, obtendo dois retângulos 1 e 2;

3- Faça um corte vertical na marcação do ponto central com altura c = a/2;

4- Dobre o retângulo 2 para cima, fazendo um vinco na dobra;

5- Repita o 2º e o 3º passo nos dois retângulos, fazendo um corte de altura e = c/2 nos até então retângulos 1 e 2. Após isso, renumere-os da direita para esquerda como 1, 2, 3 e 4;

6- Dobre os retângulos 2 e 4 para cima, fazendo um vinco na dobra;

7- Repita o 2º e o 3º passo nos quatro retângulos, fazendo um corte de altura f = e/2 nos triângulos 1, 2, 3 e 4 e renumere-os da direita para esquerda como 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8;

8- Dobre os retângulos 2, 4, 6 e 8 para cima, fazendo um vinco na dobra, o formato é de degraus de escada;

9- Desfaça todas as dobras, voltando ao papel dobrado ao meio como no 1º passo e dobre os retângulos para "dentro da folha". Abra o papel A4 em um ângulo de 90º para obter uma figura espacial que contém paralelepípedos, denominada "Triângulo de Sierpinski";

10- Cole o Triângulo de Sierpinski em um papel cartão com medidas maiores ou iguais a uma folha de papel A4.

Ao término da oficina, os participantes voltaram a responder as mesmas questões respondidas no início da oficina. Foi possível perceber diferenças conceituais entre o antes e o depois da realização da oficina. O número de participantes se manteve ao final da oficina, sendo oito participantes do 3º ano e nove do 4º ano, mais um participante já formado em Matemática. Os acadêmicos do 3º ano e do 4º ano relataram na segunda questão, que a participação na oficina acrescentou conhecimento sobre o tema.

Na 3ª questão, os oito acadêmicos do 3º ano apresentaram definições semelhantes, em síntese, de que os fractais são construções geométricas que possuem padrões de repetição, sendo divididas em partes, formadas a partir de uma figura inicial, sendo sempre semelhantes, geradas através de equações matemáticas. São encontradas

na natureza, arte, flores, legumes, economia, corpo humano, arquitetura, música. Já os nove acadêmicos do 4º ano também descreveram fractais de formas semelhantes, definindo-os como figuras geométricas que contém um padrão de repetição, sendo uma parte dela é igual ao todo. São encontradas na natureza, na samambaia, couve-flor, brócolis, encostas de morros, arquitetura, arte, música.

Para a 4ª questão, os oito acadêmicos do 3º ano, relataram que a abordagem da geometria fractal na Educação Básica está relacionada ao conhecimento de novos conteúdos matemáticos, como geometrias não euclidianas, bem como o entendimento sobre sequências lógicas e de padrões presentes na natureza. Para eles, esse conhecimento desperta a curiosidade e interesse em estudar fenômenos diferentes. Já os nove acadêmicos do 4º ano descreveram que a importância do ensino de fractais no ensino básico relaciona-se ao entendimento das características da natureza, pois utilizando a geometria não euclidiana, torna-se possível a visualização de formas e sequências, incluindo outras matérias da matemática, como frações e sequências numéricas. Eles consideram que é possível realizar atividades práticas sobre fractais, atraindo o interesse do aluno.

O participante já formado declarou que realizando a oficina seu conhecimento sobre fractais foi ampliado. Descreveu que os fractais podem ser encontrados na natureza e nas artes e que o ensino da geometria fractal na educação básica é importante devido a estar presente na natureza.

V. CONCLUSÃO

Este trabalho buscou explorar a geometria dos fractais, trazendo aspectos históricos e alguns conceitos dessa geometria, bem como perspectivas para o seu ensino e aprendizagem, a partir da aplicação de uma proposta em uma turma de licenciandos em Matemática.

Por meio do contato do que é um fractal, da observação de sua existência no mundo real e da visualização de suas propriedades na prática, com a construção de um cartão fractal, os futuros professores puderam refletir sobre a importância da abordagem deste conteúdo e verificar seu potencial no ensino de outros conceitos matemáticos. Os professores em formação puderam perceber que os fractais apresentam propriedades de autossimilaridade e complexidade infinita, trazendo o aspecto de belo e colocando ordem no caos. Além disso, puderam constatar que os fractais podem ser explicados por meio de fórmulas matemáticas.

Essa relação entre a representação do mundo e a matemática, permite destacar que a disciplina de Matemática pode ser abordada de uma forma instigante e inventiva, de modo a despertar a criatividade e curiosidade dos alunos, além de evidenciar que é uma ciência que possui amplas e diversas aplicações no cotidiano.

REFERÊNCIAS

[1] ABBEG, L. T.; ABBEG, T. P.; ABBEG, V. A. J. O. Em busca da matemática complexa: Experiência com fractal no ensino fundamental. In: EDUCERE – XII CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. Anais do Educere – XII Congresso Nacional de Educação. PUC-PR, 2015.

[2] ASSIS, T. A. de. MIRANDA, J. G. V.; MOTA, F. de B.; ANDRADE, R. F. S.; CASTILHO, C. M. M. C, de. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. Rev. Bras. Ensino Fís., v. 30, n. 2, 2008.

[3] BARBOSA, R. M. Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

[4] CAMILO, G. da L.; VITÓRIO, D.; OLIVEIRA, F. V. H. de; ZANETTE, E. N. A geometria fractal e suas aplicações na educação básica: um estudo bibliográfico. In: I FÓRUM CATARINENSE DAS LICENCIATURAS QUE FORMAM PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA. Anais do I Fórum Catarinense das Licenciaturas que formam Professores que ensinam Matemática. UFSC, Blumenau-SC, 2019.

[5] CASTILHO, J. E; DAGA, M. da S. Uma análise da geometria fractal. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Ciências Naturais), Universidade de Brasília, Faculdade UnB Planaltina, 2017.

[6] PARANÁ. Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática. Curitiba: Secretaria Estadual de Educação - SEED/PR, 2008.

[7] PARIZI, M. M. de M.; ABDELNOR NETO, A. B. Geometria fractal no ensino fundamental. In: I JEM – JORNADA DE ESTUDOS EM MATEMÁTICA. Anais do I JEM – Jornada de Estudos em Matemática. Marabá – PA, 2015.

[8] PAULA, C. E. S. de; SOUZA, T. M. R. de. Uma abordagem da geometria fractal para o ensino médio. C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 10, p. 135-148, dez. 2017.

[9] PEREIRA, T.; BORGES, F. A.; A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos. Acta Scientiae, Canoas, v.19, n.4, p. 563-581, 2017.

[10] RUDEK, B.; TARTARE, P. L.; GAVANSKI, D. Geometria fractal: uma abordagem diversificada para a sala de aula. In: XII EPREM - ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Anais do XII EPREM - Encontro Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão-PR, 2014.